1. **Отношения и их представления в виде списка, через характеристическую функцию, как матрица инцидентности, в виде графа**

1. Определение бинарного отношения

Пусть заданы два множества A и B. Бинарным отношением R между A и B называют подмножество прямого произведения A×B. То есть, R⊆A×B

Если (a,b)∈R, то говорят, что «элемент aa из A находится в отношении R с элементом b из B». Когда речь идёт об отношении на одном множестве A (то есть A×A), его часто называют отношением на A.

Пример

Возьмём множество A={1,2,3}. Определим на нём бинарное отношение R так: R={ (1,2),(2,3)}. Это значит, что «1 находится в отношении с 2» и «2 находится в отношении с 3»; других пар в R нет.

Далее мы рассмотрим, как это отношение RR можно изобразить четырьмя основными способами.

2. Представление отношения в виде списка пар

Самый прямой способ: просто перечислить все пары (a,b), которые входят в R. Для отношения R⊆A×B список будет иметь вид:

R={(a1,b1), (a2,b2), …,(ak,bk)}

Пример

Для R={(1,2),(2,3)}на множестве A={1,2,3}список пар и есть всё представление:

R={(1,2),(2,3)}

Это простой и наглядный метод, особенно когда множество A×B мало по объёму.

3. Характеристическая (индикаторная) функция отношения

Характеристическая (или индикаторная) функция X\_R ​ задаётся так:

X\_R:A×B  →  {0,1},

где

X\_R (a,b)={1, если (a,b)∈R ; 0, если (a,b)∉R.

Иными словами, X\_R ​ «отмечает» единицей все те пары, которые входят в отношение R, и нулём — те, которые не входят.

Пример

Опять возьмём A={1,2,3} и отношение R={(1,2),(2,3)} Тогда

X\_R (1,1)=0,   X\_R (1,2)=1,   X\_R (1,3)=0,

X\_R (2,1)=0,   X\_R (2,2)=0,   X\_R (2,3)=1,

X\_R (3,1)=0,   X\_R (3,2)=0,   X\_R (3,3)=0.

Это и есть полное описание X\_R ​. Если вдруг нужно нагляднее, можно записать в виде таблицы (см. ниже пример с матрицей).

## 4. Матрица инцидентности (смежности)

Когда A и B (или хотя бы одно из них) конечны, принято кодировать отношение с помощью **матрицы** (часто называют матрицей смежности или инцидентности — термин «смежность» особо часто применяется для отношений на одном множестве A, то есть графов).

1. Считаем, что множество A={a1,a2,…,am} и множество B={b1,b2,…,bn}
2. Строим матрицу M размера m×n, где элемент M[i,j] (в i-й строке и j-м столбце) равен 1, если (ai,bj)∈R, и равен 0, если (ai,bj)∉R

Если речь о **отношении на одном множестве** A (то есть R⊆A×A), тогда это будет **квадратная** матрица m×m. В теории графов её чаще называют **матрицей смежности**.

### Пример

Для того же R={(1,2),(2,3)} на A={1,2,3}

* Упорядочим элементы A как (a1=1, a2=2, a3=3)
* Сформируем матрицу M 3×3. По строкам идут «первые» элементы пар, по столбцам — «вторые».

Тогда:

* M[1,1]=0 потому что (1,1)∉R;
* M[1,2]=1 потому что (1,2)∈R;
* M[2,3]=1 потому что (2,3)∈R, и т.д.

Если бы у нас были два разных множества A и B разной мощности, мы получили бы прямоугольную матрицу m×n. Но суть та же: 1 означает «пара присутствует в R», 0 — «пары нет».

## 5. Граф (ориентированный или неориентированный)

Часто полезно **визуализировать** отношение в виде графа:

1. Каждый элемент a∈A становится **вершиной** графа (если R⊆A×A) или мы делаем две группы вершин (одна для элементов A, другая — для B, если это общее отношение A×B).
2. Если (x,y)∈R, то в графе проводят **стрелку** (ориентированное ребро) из вершины x в вершину y.

Когда речь идёт об отношении на **одном** множестве A, это будет **ориентированный граф** на вершинах из A. Если отношение симметрично ((x,y)∈R  ⟹  (y,x)∈R), то можно рисовать **неориентированные** рёбра.

### Пример

Для R={(1,2),(2,3)} на A={1,2,3} граф будет выглядеть так:

* Три вершины: 1, 2, 3.
* Стрелка из 1 в 2 (так как (1,2)∈R).
* Стрелка из 2 в 3 (так как (2,3)∈R).

Это простой «цепочечный» ориентированный граф: 1→2→3.